Corrigés des exercices 4.22 à 4.27 — حلول التمارين من 22.4 إلى 27.4

Exercice 4.22 :

1/ Le vecteur vitesse :

Ecrivons l'expression du vecteur position : $\boxed{\vec{r} = \frac{1}{2}bt^2.\vec{i} \ + \ ct.\vec{j} + \frac{3}{2}bt^2.\vec{k}}$

Pour obtenir le vecteur vitesse on doit dériver le vecteur position par rapport au temps :

$$\dot{x} = v_x = bt \ , \ \dot{y} = v_y = c \ , \ \dot{z} = v_z = 3bt$$

$$\boxed{\vec{v} = bt.\vec{i} + c.\vec{j} + 3bt.\vec{k}} \ ; \ \boxed{v = \sqrt{10\left(bt\right)^2 + c^2}}$$

Dérivons le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération :

$$\ddot{x} = a_x = b \ , \ \ddot{y} = a_y = 0 \ , \ \ddot{z} = a_z = 3b$$

$$\boxed{\vec{a} = b.\vec{i} + 3b.\vec{k}} \ ; \ \boxed{a = 2b}$$

2/ Equation de la trajectoire du point m : éliminons le temps entre les deux équations horaires $x\left(t\right)$ et $y\left(t\right)$:

$$x = \frac{1}{2}bt^2 \Rightarrow \text{t=}\frac{2\text{x}}{\text{b}} \ , \ \boxed{y = c\sqrt{\frac{2\text{x}}{\text{b}}}}$$

Exercice 4.23 :

1/ Le vecteur tangentiel à la trajectoire est le vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{\ }}{dt}$,

En coordonnées cartésiennes le vecteur vitesse est donc : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$

Son module est égal à : $v = \sqrt{36+64} \Rightarrow v = 10m.s^{-2}$

Le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire C est porté par le vecteur $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}}$$

2/ Si $\vec{\ }$ est le vecteur position du point M au temps t, alors $\vec{v} = \frac{d\vec{\ }}{dt}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$$

$$\vec{v} = 10\left(-\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = 10.\vec{u}_T = 10\vec{T} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v.\vec{T}}$$

Exercice 4.24 :

1/ Nous savons que le vecteur position en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$$

Nous en déduisons le vecteur vitesse par dérivation :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z}.\vec{u}_z$$

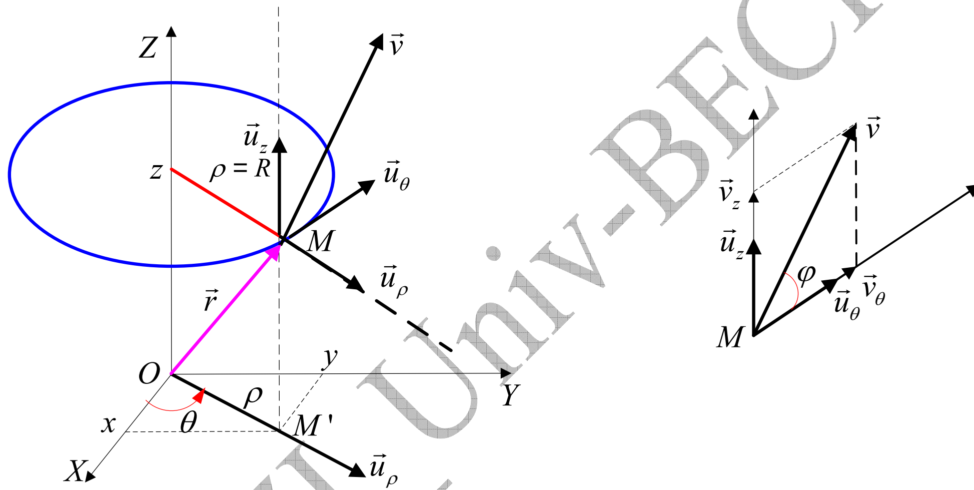
$$\left.\begin{aligned} &\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \\ &\dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ &\dot{z} = h\dot{\theta} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

Le vecteur accélération est à son tour :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + R.\dot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + h.\ddot{\theta}.\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\theta} = 0 \\ &\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_\rho \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{u}_\rho + R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + h.\ddot{\theta}.\vec{u}_z}$$

2/ Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est parallèle au plan OXY, donc l'angle que forme le vecteur vitesse avec le plan OXY est égal à l'angle que fait le vecteur $\vec{u}_\theta$ avec le plan OXY, comme il est indiqué sur la figure ci-dessous, en plus du fait que $\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_z$.



$$\tan\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \frac{v_z}{v_\theta} = \frac{h\dot{\theta}}{R\dot{\theta}} \Rightarrow \boxed{\tan\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \frac{h}{R} = Cte}$$

3/ Le mouvement est rotationnel uniforme, cela veut dire que $\dot{\theta} = \omega = Cte$ et $\vec{a} = -R.\omega^2.\vec{u}_\rho$.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{u}_\rho$, c'est-à-dire centripète, ce qui confirme qu'il passe par l'axe du cylindre. $\vec{u}_\rho$ appartient au plan OXY, et $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{u}_\rho$, ce qui montre que l'accélération est parallèle au plan OXY.

Nous venons de démontrer que l'accélération est centripète, donc :

$$\left.\begin{aligned} &r = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^2}{a} \\ &v^2 = R^2.\omega^2 + h^2.\omega^2 \\ &a = R^2.\omega^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow r = \frac{R^2\omega^2 + h^2\omega^2}{R\omega^2}, \quad \boxed{r = \frac{R^2 + h^2}{R},}$$

Exercice 4.25 :

1/ a/ Le mouvement du point m s'effectue dans le plan XOY. Afin d'obtenir l'équation de la trajectoire de ce point, on élimine le temps entre les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$. Nous obtenons $x^2 + y^2 = R^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R.

b/ Suivant l'axe OZ , l'équation de la trajectoire $z = \alpha .t$ nous indique que le mouvement est rectiligne uniforme verticalement.

c/ La trajectoire du mobile est la composition du mouvement plan et du mouvement vertical, il en résulte un mouvement hélicoïdal.

2/ Dans le système de coordonnées cylindriques :

a/ Le vecteur position est : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{r} = \overrightarrow{OM} = R.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$

b/ La vitesse et l'accélération du point M sont donc :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\vec{u}}_\rho + z.\vec{u}_z \\ \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi = R\omega.\vec{u}_\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega.\vec{u}_\varphi + b.\vec{u}_z} \quad , \quad \boxed{v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = R\omega.\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}.\vec{u}_\rho = -R\omega.\vec{u}_\rho \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2.\vec{u}_\rho} \quad , \quad \boxed{a = R\omega^2}$$

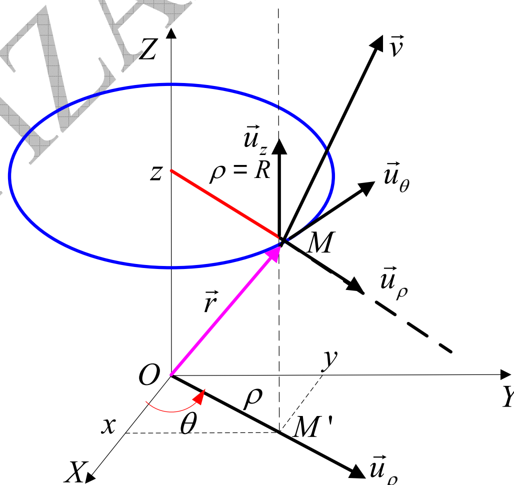
L'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur $\vec{u}_\varphi$, d'après la figure ci-dessous, est :

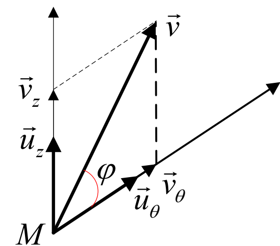
$$\boxed{\tan\beta = \frac{v_z}{v_\varphi} = \frac{b}{R\omega}}$$

Quant à l'accélération elle est centripète c'est-à-dire qu'elle est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire.

c/ Le rayon de courbure est :

$$\left.\begin{array}{l} r = \dfrac{v^2}{a_N} \\ a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow a_N^2 = R^2.\omega^4 - \left(R^2.\omega^2 + b^2\right) \\ a_T^2 = R^2.\omega^2 + b^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{r = \frac{R^2.\omega^2 + b^2}{\sqrt{R^2.\omega^2\left(\omega^2 - 1\right) - b^2}}}$$





Exercice 4.26 :

1/ Les expressions des vecteurs unitaires de la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ en coordonnées cartésiennes sont :

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\phi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}$:

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\sin\theta.\sin\varphi.\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot{\varphi}.\sin\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot{\theta}\sin\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\left[\underbrace{\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_\theta}\right] - \dot{\varphi}.\sin\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + .\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi}$$

Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}_\theta$:

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \dot{\theta}\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\cos\theta.\sin\varphi.\vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot{\varphi}.\cos\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot{\theta}\cos\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\left[\underbrace{\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_r}\right] + \dot{\varphi}.\cos\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + .\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi}$$

Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}_\theta$:

$$\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\cos\varphi.\vec{i} + \dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{j}\right] \to (1)$$

Cette expression n'est pas définitive…

Retournons aux expressions de $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$. Multiplions la première par $\sin\theta$ et la seconde par $\cos\theta$, nous obtenons :

$$\vec{u}_r.\sin\theta = \sin^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \sin\theta.\cos\theta.\vec{k} \to (2)$$
$$\vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \cos\theta.\sin\theta.\vec{k} \to (3)$$

Additionnons les deux expressions pour obtenir :

$$\vec{u}_r.\sin\theta + \vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}$$

Remplaçons maintenant dans l'expression (1) de $\dot{\vec{u}}_\varphi$, elle devient :

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]}$$

2/ Démonstration de l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques :

Nous partant de l'expression de la vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi$$

Dérivons la par rapport au temps :

$$\vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}.\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + \dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\dot{\vec{u}}_\phi$$

Remplaçons par leurs expressions trouvées en 1/ :

$$\vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}.\left[\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}.\left[-\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi\right] +$$
$$\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\left[-\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right]$$

Développons puis ordonnons :

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta\right].\vec{u}_r + \dot{r}.\left[\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \left[r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi\right].\vec{u}_\phi + \left[r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta\cos\theta\right].\vec{u}_\theta$$

Exercice 4.27 :

1/ En coordonnées sphériques le vecteur position s'écrit : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}$

a/ Dans le même système de coordonnées le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}$

$$\left.\begin{array}{l} r = R = Cte \Rightarrow \dot{r} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi \\ \theta = Cte \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \\ \varphi = \omega t^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = 2\omega t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi}$$

Le vecteur accélération avec les mêmes coordonnées s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right] \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\left(-\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right)$$

$$\vec{a} = -\dot{\varphi}.R\omega t\sin\theta.\vec{u}_r R\omega.\vec{u}_\varphi - \dot{\varphi}.R\omega t\cos\theta.\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2 t^2.\vec{u}_r - \sqrt{3}.R\omega^2 t^2.\vec{u}_\theta + R\omega.\vec{u}_\varphi}$$

b/ Module du vecteur vitesse : $\boxed{v = R\omega t}$

Module du vecteur accélération :

$$a = \sqrt{\left(-R\omega^2 t^2\right)^2 + \left(\sqrt{3}.R\omega^2 t^2\right)^2 + \left(R\omega\right)^2}$$

$$\boxed{a = R\omega\sqrt{4\omega^2 t^4 + 1}}$$

c/ L'accélération tangentielle :

$$\left.\begin{array}{l} a_N^2 = a^2 - a_T^2 \\ a_T = \dfrac{dv}{dt} = R\omega \\ a^2 = R^2\omega^2\left[4\omega^2 t^4 + 1\right] \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a_N = 2R\omega^2 t^2}$$

2/ En coordonnées cartésiennes le vecteur position est:

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

$$\left.\begin{array}{l} x = R\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{2}R\cos\omega t \\ y = R\sin\theta\sin\varphi = \dfrac{1}{2}R\sin\omega t \\ z = R\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \frac{1}{2}R\cos\omega t^2.\vec{i} + \frac{1}{2}R\sin\omega^2 t.\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}R.\vec{k}}$$

a/ Les vecteurs vitesse et accélération dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont **:**

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -R\omega t\sin\omega t^2.\vec{i} + R\omega t\cos\omega t^2.\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left[-R\omega\sin\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\cos\omega t^2\right].\vec{i} + \left[R\omega\cos\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\sin\omega t^2\right].\vec{j}}$$

Les modules de la vitesse et de l'accélération sont :

$$\boxed{v = R\omega t} \quad ; \quad \boxed{a = R\omega\sqrt{\left[1 + 4\omega^2 t^4\right]}}$$

Les deux modules de la vitesse et de l'accélération sont compatibles avec le résultat de la question 1/b

3/ Trajectoire du point mobile :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2}$$

Nous en concluons que ce point matériel M décrit un cercle de rayon $\dfrac{R}{2}$ et de centre $\left(0, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)$. Quant au vecteur position, il décrit un cône de sommet O et dont le bord est le cercle décrit.

4/ Nature du mouvement du point M : la trajectoire est un cercle, le module de la vitesse est constant et l'accélération tangentielle est constante, donc le mouvement est circulaire uniformément accéléré.

